TEORÍA DE CILINDROS DE PARED GRUESA

DESARROLLO ENFOCADO AL ESTUDIO DEL CASO GENERALIZADO DE AJUSTES PRENSADOS.

CONSIDERACIONES Y CONVENCIONES:

A.— DEF. CILINDRO DE PARED GRUESA $\Longrightarrow$ $D/t < 10$ $\left(\begin{array}{l} D = \text{diámetro} \\ t = \text{espesor} \end{array} \right)$

B.— CASO GENERAL: CARGAS EXTERNAS E INTERNAS SIMETRICAS RESPECTO AL EJE DEL CILINDRO Y CONSTANTES RESPECTO A ESE MISMO EJE.

$\left(\begin{array}{l} p_b = \text{CARGA EXTERNA} \\ p_a = \text{CARGA INTERNA} \end{array} \right)$

C.— CADA PUNTO DEL CILINDRO SE DESPLAZA RADIALMENTE DEBIDO A LAS DEFORMACIONES PRODUCIDAS POR LAS CARGAS APLICADAS.

D.— NO EXISTEN TENSIONES AXIALES EN EL CILINDRO.

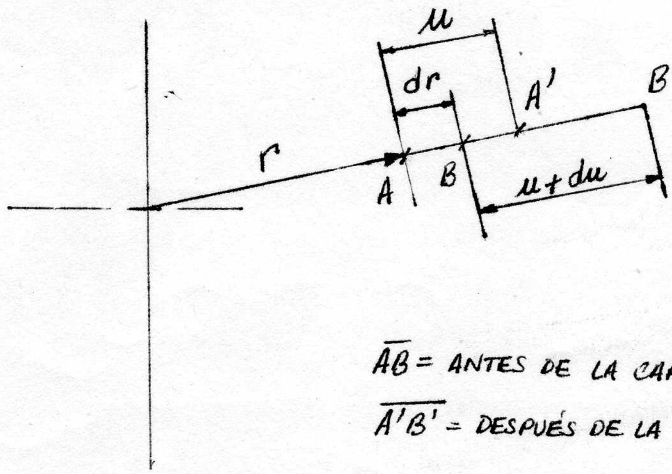
E.— DESIGNAREMOS POR "u" AL DESPLAZAMIENTO RADIAL DE UN PUNTO ARBITRARIO. ESTE SERÁ FUNCIÓN DEL RADIO GENERALIZADO "r", Y NO VARIARA <u>A LO LARGO</u> DEL CILINDRO.

F.— CONSIDERAREMOS POSITIVA LA DIRECCIÓN "r" PARTIENDO DEL EJE DEL CILINDRO.

G.— DESIGNAREMOS POR ε_r Y ε_t LOS ALARGAMIENTOS O DEFORMACIONES UNITARIAS EN EL CILINDRO, EN LA DIRECCIÓN RADIAL Y CIRCUNFERENCIAL RESPECTIVAMENTE.

DEFORMACIONES:

ANALIZAREMOS UN SEGMENTO ELEMENTAL $dr = AB$ EN LA DIRECCIÓN RADIAL DEL CILINDRO, ANTES Y DESPUÉS DE APLICAR LAS CARGAS p_a Y p_b.



$\overline{AB}$ = ANTES DE LA CARGA

$\overline{A'B'}$ = DESPUÉS DE LA CARGA.

EL PUNTO A EXPERIMENTA UN DESPLAZAMIENTO "u"

Y EL PUNTO B, UN DESPLAZAMIENTO "$u + du$".

LA NUEVA LONGITUD DEL ELEMENTO SERÁ $\overline{A'B'} = dr + du$

(YA QUE: $\overline{A'B'} = \cancel{r} + dr + \cancel{u} + du - (\cancel{r} + \cancel{u}) = dr + du$)

— DEFORMACIÓN RADIAL UNITARIA $\varepsilon_r = \dfrac{\Delta l}{l_0} = \dfrac{(dr+du)-dr}{dr} = \dfrac{du}{dr}$

— DEFORMACIÓN CIRCUNFERENCIAL UNITARIA.

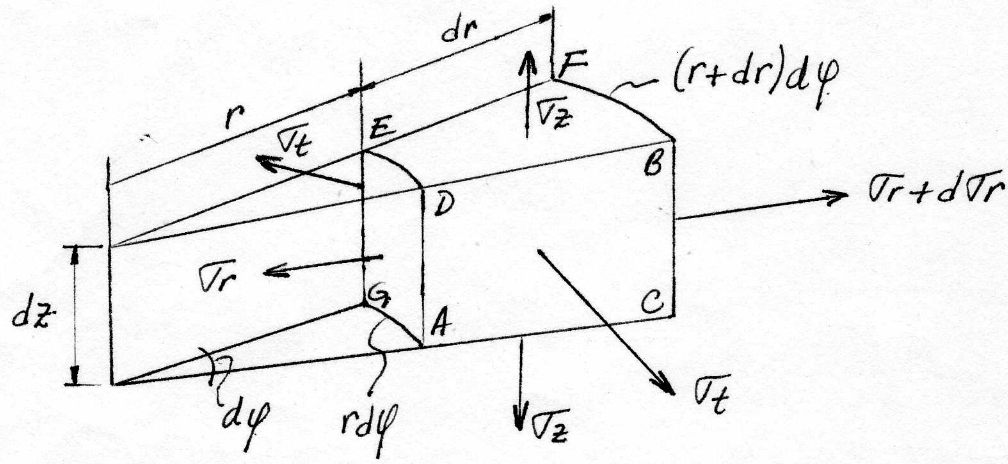
ANTES DE LA CARGA: LONG. CIRCUNF. $= 2\pi r$

DESPUES DE LA CARGA: LONG. CIRCUNF $= 2\pi(r+u)$

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

ESFUERZOS :

PARA EL ANÁLISIS DE ESFUERZOS TOMAREMOS UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLÚMEN DEL CILINDRO.



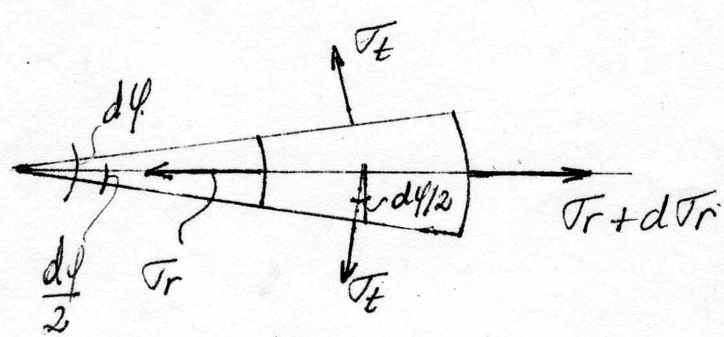
LAS DIMENSIONES DEL ELEMENTO SON dr, dz, $rd\varphi$ y $(r+dr)d\varphi$.

— DEBIDO A LA SIMETRÍA AXIAL, SOLO EXISTIRÁN TENSIONES NORMALES EN LOS PLANOS DEL ELEMENTO (σ_t, σ_r, σ_z y $\sigma_r + d\sigma_r$)

— LAS TENSIONES TANGENCIALES SON IGUALES A CERO, POR LO QUE LOS PLANOS SON PRINCIPALES. $(\tau_{tz} = \tau_{zt} = \tau_{rt} = \tau_{rz} = \tau_{tr} = \tau_{zr} = 0)$

— POR LAS CONSIDERACIONES INICIALES, LAS TENSIONES σ_z SON NULAS TAMBIÉN

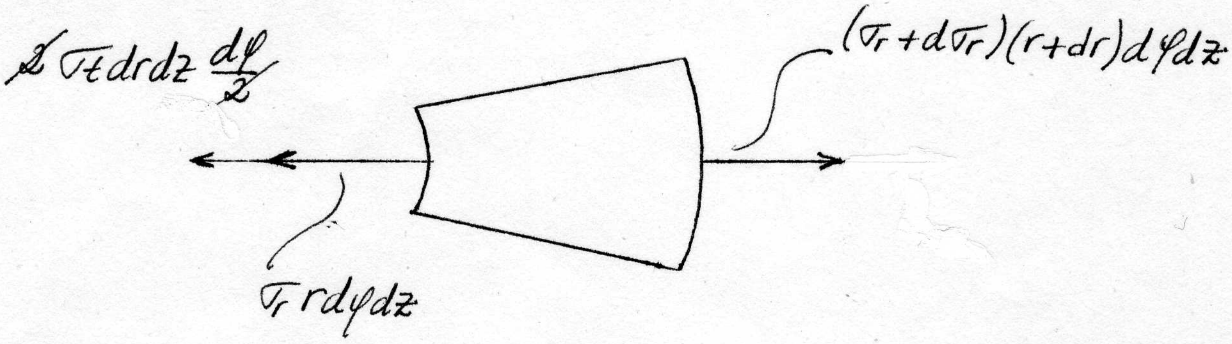
CONCLUSIÓN: SÓLO EXISTE VARIACIÓN DE TENSIONES EN FUNCIÓN DEL RADIO GENÉRICO "r".



PROYECCIÓN EN LA DIRECCIÓN RADIAL DE LAS TENSIONES $\sigma_t = 2\sigma_t \operatorname{Sen}\frac{d\varphi}{2}$

DONDE $\operatorname{Sen}\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$

FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL ELEMENTO EN LA DIRECCIÓN RADIAL.



SUMATORIA DE FUERZAS EN LA DIRECCIÓN RADIAL.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)d\varphi dz - \sigma_r r d\varphi dz - \sigma_t dr dz d\varphi = 0 \qquad (1)$$

AL DIVIDIR ENTRE $(dr\, d\varphi\, dz)$. SE OBTIENE.

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r - \sigma_t = 0$$

ó
$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0 \qquad (2)$$

RELACIÓN ESFUERZOS - DEFORMACIONES (ELASTICIDAD, HOOKE).

SE SABE QUE:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\sigma_t\right] \\ \varepsilon_t = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_t - \mu\sigma_r\right] \end{cases}$$

$\mu = \nu =$ Módulo de Poisson.

ESTE SISTEMA TAMBIÉN SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t\right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r\right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

SUSTITUYENDO LAS EXPRESIONES ESPECÍFICAS PARA ε_r y ε_t EN EL CASO DE CILINDROS DE PARED GRUESA., SE TIENE:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

SUSTITUYENDO (4) EN (2) QUEDA:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

ó $$\frac{d}{dr}\left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right] = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right] = 0 \quad (5)$$

RESOLVIENDO (5), (LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ELASTICIDAD).

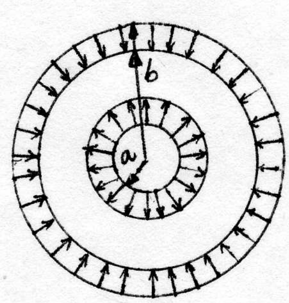
$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$ C_1 y C_2 SON CONSTANTES DE INTEGRACIÓN. (6)

INTRODUCIENDO (6) EN (4), QUEDA:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu)\dfrac{1}{r^2}\right] \\[2ex] \sigma_t = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu)\dfrac{1}{r^2}\right] \end{cases} \qquad (7)$$

LAS CONSTANTES C_1 y C_2 SE DETERMINAN IMPONIENDO LAS CONDICIONES DE BORDE CONOCIDAS, ES DECIR:

En $r = a$ (radio interior) ; $\sigma_r = -p_a$
En $r = b$ (radio exterior) ; $\sigma_r = -p_b$. (ver figura).



.— EL SIGNO NEGATIVO DE p_a SE DEBE A QUE EL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE DONDE ES APLICADA p_a, TIENE SENTIDO NEGATIVO (Consideración F.-).

EN REALIDAD DEBEMOS HABLAR DE VECTOR TRACCIÓN $\bar{S}_a = p_a \hat{u} = -p_a$

.— EL SIGNO NEGATIVO DE p_b SE DEBE A LA DIRECCIÓN NEGATIVA DEL VECTOR TRACCIÓN PRODUCTO DEL SENTIDO DE LA PRESIÓN p_b

$\bar{S}_b = -p_b \hat{u}$ ($\hat{u}$ positivo).

SOSTITUYENDO LAS CONDICIONES DE BORDE EN 7, TENDREMOS DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS C_1 Y C_2, QUE AL RESOLVERSE RESULTA:

$$C_1 = \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\left(\frac{1}{1+\nu}\right)\left(\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}\right)$$

$$C_2 = \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\left(\frac{1}{1-\nu^2}\right)\left(\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}\right)(p_a - p_b)$$

Y REEMPLAZANDO ESTOS VALORES EN 7, NOS QUEDAN <u>LAS ECUACIONES DE LAME PARA CILINDROS DE PARED GRUESA:</u> (con $\sigma_z = 0$)

$$\sigma_r = \frac{(a^2 p_a - b^2 p_b) - (p_a - p_b)\, a^2 b^2 / r^2}{(b^2 - a^2)}$$

$$\sigma_t = \frac{(a^2 p_a - b^2 p_b) + (p_a - p_b)\, a^2 b^2 / r^2}{(b^2 - a^2)}$$

//

$$\sigma_r = \frac{\cancel{\tfrac{1}{4}}\left(\frac{d^2}{\cancel{4}} p_i - \frac{D^2}{\cancel{4}} p_e\right) - (p_i - p_e)\frac{D^2 d^2}{\cancel{4} r^2}}{\cancel{\tfrac{1}{4}}(D^2 - d^2)}$$